

## Perturbations thermiques du système balancier - spiral

### Balancier de chronomètre de marine - Déformation thermique

### Balancier bimétallique à serge coupée et deux masses compensatriques

➡ Référence :D:\Résonateur (TE)\Data\Chronomètre de marine.mcd(R)

$$T_0 = 0.4 \text{ s} \quad f = 2.5 \text{ Hz} \quad \omega_0 := 2 \cdot \pi \cdot f$$

### Masse et moment d'inertie de la serge à la température ambiante

$$\Theta_{\text{ambiante}} := 20$$

$$D_{s\_ext} = 35 \text{ mm} \quad R_0 = 16.731 \text{ mm} \quad h_{bs} = 4.3 \text{ mm} \quad \rho_1 = 7.82 \times 10^3 \text{ m}^{-3} \cdot \text{kg} \quad \rho_2 = 8.7 \times 10^3 \text{ m}^{-3} \cdot \text{kg}$$

$$M_{\text{serge}} = 4.9 \times 10^3 \text{ mg} \quad J_{\text{serge}} = 14.1 \text{ gm} \cdot \text{cm}^2 \quad \lambda_0 = 155 \text{ deg}$$

### Rayon de courbure de la serge et coefficient de dilatation de la soudure en fonction de la température

$$D := 4 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_{bs}^2 + (E_2 \cdot e_2^2 - E_1 \cdot e_1^2)^2 \quad m := \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2 \cdot R_0}$$

$$M := (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot (E_2 \cdot e_2 - E_1 \cdot e_1) - m \cdot (E_2 \cdot e_2^2 + E_1 \cdot e_1^2) \quad m = 2.092 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

$$N := \frac{3}{2} \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot (E_2 \cdot e_2^2 + E_1 \cdot e_1^2) - 2 \cdot m \cdot (E_2 \cdot e_2^3 - E_1 \cdot e_1^3) \quad D = 5.796 \times 10^{10} \text{ m}^4 \text{ Pa}^2$$

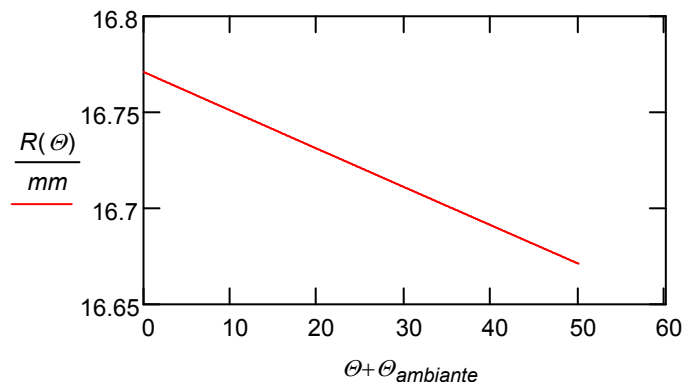
$$y(\Theta) := \frac{2 \cdot N \cdot (E_2 \cdot e_2 + E_1 \cdot e_1) - 3 \cdot M \cdot (E_2 \cdot e_2^2 - E_1 \cdot e_1^2)}{D} \cdot \Theta \quad y(\Theta) = 0.402 \text{ m}^{-1}$$

$$z(\Theta) := \frac{2 \cdot M \cdot (E_2 \cdot e_2^3 + E_1 \cdot e_1^3) - N \cdot (E_2 \cdot e_2^2 - E_1 \cdot e_1^2)}{D} \cdot \Theta \quad z(\Theta) = -3.538 \times 10^{-5}$$

$$x(\Theta) := y(\Theta) - \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2 \cdot R_0} \cdot \Theta \quad g(\Theta) := z(\Theta) + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \cdot \Theta \quad x(\Theta) = 0.357 \text{ m}^{-1}$$

$$R(\Theta) := \left( x(\Theta) + \frac{1}{R_0} \right)^{-1} \quad R(\Theta) = 16.63143 \text{ mm} \quad \frac{g(\Theta)}{\Theta} = 1.429 \times 10^{-5}$$

$$\Theta := -20, -20 + 0.1 \dots 30$$



### Formules approchées

$$\Theta := 30$$

$$y_a(\Theta) := 6 \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \frac{E_1 \cdot E_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_{bs}}{4 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_{bs}^2 + (E_2 \cdot e_2^2 - E_1 \cdot e_1^2)^2} \cdot \Theta \quad y_a(\Theta) = 0.24231 m^{-1}$$

$$z_a(\Theta) := \frac{1}{2} \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \frac{E_2^2 \cdot e_2^4 - E_1^2 \cdot e_1^4 + 4 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_{bs} \cdot (e_1 - e_2)}{4 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_{bs}^2 + (E_2 \cdot e_2^2 - E_1 \cdot e_1^2)^2} \cdot \Theta \quad z_a(\Theta) = -1.926 \times 10^{-5}$$

$$x_a(\Theta) := y_a(\Theta) - \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2 \cdot R_0} \cdot \Theta \quad g_a(\Theta) := z_a(\Theta) + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \cdot \Theta \quad x_a(\Theta) = 0.215 m^{-1}$$

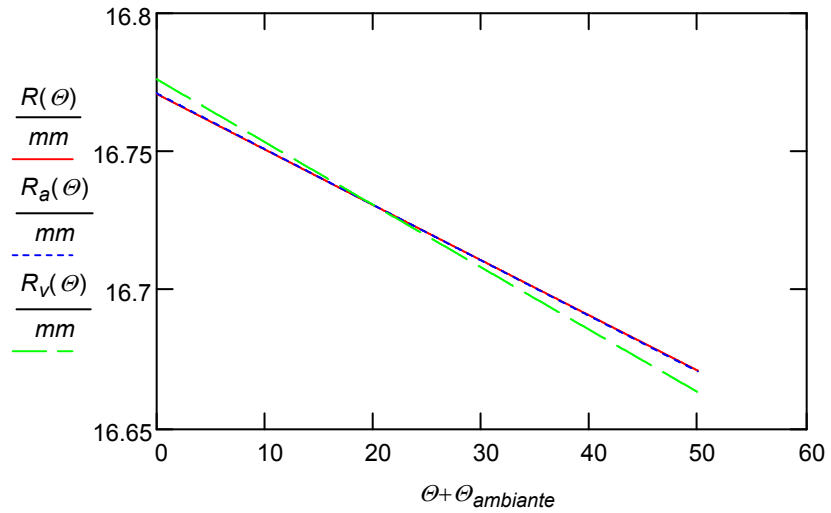
$$R_a(\Theta) := \left( x_a(\Theta) + \frac{1}{R_0} \right)^{-1} \quad R_a(\Theta) = 16.67072 mm \quad \frac{g_a(\Theta)}{\Theta} = 1.436 \times 10^{-5}$$

### Formule de Villarceau

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2 \cdot R_0} \cdot \Theta = 0.027 m^{-1} \quad y_a(\Theta) = 0.24231 m^{-1} \quad x_v(\Theta) := y_a(\Theta)$$

$$R_v(\Theta) := \left( x_v(\Theta) + \frac{1}{R_0} \right)^{-1} \quad R_v(\Theta) = 16.66325 mm$$

$$\Theta := -20, -20 + 0.1 .. 30$$



### Condition de compensation

Spiral en acier  $\gamma_0 := \gamma_{ac_0} \quad \gamma_0 = -2.63 \times 10^{-4} \quad \alpha_s := \alpha_{ac_0} \quad \alpha_s = 1.04 \times 10^{-5}$

Variation relative de période due au spiral  $\delta_s(\Theta) := \frac{-3}{2} \cdot \alpha_s \cdot \Theta \quad \delta_E(\Theta) := \frac{-1}{2} \cdot \gamma_0 \cdot \Theta$

## Calcul de la masse des masses de compensation thermique

Approximation du moment d'inertie de la serge  $M_{bs} := M_{serge}$   $J_{bs} := M_{bs} \cdot R_0^2$   $J_{bs} = 13.8 \text{ gm} \cdot \text{cm}^2$

Position de la coupure de la serge  $\lambda_0 = 155 \text{ deg}$

Coefficient de dilatation de la serge  $\alpha_R := \frac{-3}{2} \cdot \frac{R_0}{e_{bs}} \cdot (\alpha_2 - \alpha_1)$   $\alpha_R = -1.351 \times 10^{-4}$

Coefficient de dilatation du bras  $\alpha' := \alpha_{acier}$   $\alpha' = 1.15 \times 10^{-5}$

Position angulaire d'une masse  $\lambda_m = 110 \text{ deg}$  (voir la référence pour les autres dimensions)

$$X(m_x) := 2 \cdot \left[ \alpha_R + 2 \cdot (\alpha' - \alpha_R) \cdot \frac{M_{bs} \cdot \frac{\sin(\lambda_0)}{\pi} + m_x \cdot \cos(\lambda_m) + M_p + M_{vis} \cdot \cos(\lambda_{vis})}{M_{bs} + 2 \cdot m_x + 2 \cdot M_p + 2 \cdot M_{vis}} \right]$$

$m_x := M_m$   $m_c := \text{racine} \left[ X(m_x) \cdot 10^5 - (\gamma_0 + 3 \cdot \alpha_s) \cdot 10^5, m_x \right]$   $m_c = 1.705 \text{ gm}$

$$\delta_b(\theta) := \frac{1}{2} \cdot \left[ \alpha_R + 2 \cdot (\alpha' - \alpha_R) \cdot \frac{M_{bs} \cdot \frac{\sin(\lambda_0)}{\pi} + m_c \cdot \cos(\lambda_m) + M_p + M_{vis} \cdot \cos(\lambda_{vis})}{M_{bs} + 2 \cdot m_c + 2 \cdot M_p + 2 \cdot M_{vis}} \right] \cdot 2 \cdot \theta$$

Contrôles  $\delta_s(30) + \delta_E(30) = 3.477 \times 10^{-3}$   $\delta_b(30) = -3.477 \times 10^{-3}$

Masse compensatrice donnée dans la référence  $M_m = 1.668 \text{ gm}$  OK

## Variation thermique du moment d'inertie du balancier

### Variation thermique du moment d'inertie de la serge déformée

Moment d'inertie des masses à 20°C  $J_{bs} = 13.831 \text{ gm} \cdot \text{cm}^2$

### Variation thermique du moment d'inertie de la serge

$$\Delta J_{bs}(\theta) := M_{serge} \cdot R_0^2 \cdot \left[ 2 \cdot \alpha_R \cdot \theta + 4 \cdot \theta \cdot (\alpha' - \alpha_R) \cdot \frac{\sin(\lambda_0)}{\pi} \right]$$
  $\Delta J_{bs}(30) = -79.403 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

### Variation du moment d'inertie des masses par déformation thermique de la serge

$J_m = 4.852 \text{ gm} \cdot \text{cm}^2$   $J_p = 0.539 \text{ gm} \cdot \text{cm}^2$   $J_{vis} = 0.108 \text{ gm} \cdot \text{cm}^2$

### Variation du moment d'inertie des masses par déplacement thermique de celles-ci

$\Delta J_m(\theta) := J_m \cdot [\alpha_R + (\alpha' - \alpha_R) \cdot \cos(\lambda_m)] \cdot 2 \cdot \theta$   $\Delta J_m(30) = -0.054 \text{ gm} \cdot \text{cm}^2$

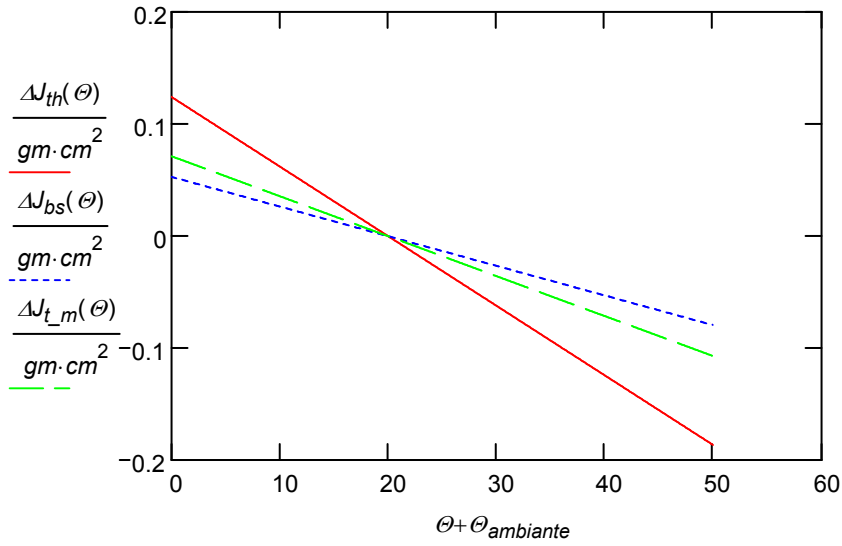
$\Delta J_p(\theta) := J_p \cdot [\alpha_R + (\alpha' - \alpha_R) \cdot \cos(\lambda_p)] \cdot 2 \cdot \theta$   $\Delta J_p(30) = 3.722 \times 10^{-4} \text{ gm} \cdot \text{cm}^2$

$\Delta J_{vis}(\theta) := J_{vis} \cdot [\alpha_R + (\alpha' - \alpha_R) \cdot \cos(\lambda_{vis})] \cdot 2 \cdot \theta$   $\Delta J_{vis}(30) = 4.995 \times 10^{-5} \text{ gm} \cdot \text{cm}^2$

$\Delta J_{t_m}(\theta) := 2 \cdot (\Delta J_m(\theta) + \Delta J_p(\theta) + \Delta J_{vis}(\theta))$   $\Delta J_{t_m}(30) = -0.107 \text{ gm} \cdot \text{cm}^2$

## Variation thermique totale du moment d'inertie et graphes comparatifs

$$\Delta J_{th}(\Theta) := \Delta J_{bs}(\Theta) + \Delta J_{t_m}(\Theta)$$



$$\frac{\Delta J_{th}(30)}{J_b} = -0.676 \%$$

## Variation de marche totale due à la déformation thermique de la serge

Variation de marche due  
à la dilatation de la serge

$$\delta_{bs}(\Theta) := \frac{\Delta J_{bs}(\Theta)}{2 \cdot J_b}$$

$$\mu_{bs}(\Theta) := -86400 \cdot \delta_{bs}(\Theta)$$

$$\mu_{bs}(30) = 124.364$$

Variation de marche due  
au déplacement des masses

$$\delta_m(\Theta) := \frac{\Delta J_{t_m}(\Theta)}{2 \cdot J_b}$$

$$\mu_m(\Theta) := -86400 \cdot \delta_m(\Theta)$$

$$\mu_m(30) = 167.639$$

Variation de marche totale (au second ordre près)

$$\mu_b(\Theta) := -86400 \cdot \delta_b(\Theta)$$

$$\mu_b(30) = 300.413$$

Variation de marche totale

$$\delta_{th}(\Theta) := \frac{\Delta J_{th}(\Theta)}{2 \cdot J_b}$$

$$\mu_{th}(\Theta) := -86400 \cdot \delta_{th}(\Theta)$$

$$\mu_{th}(30) = 292.003$$

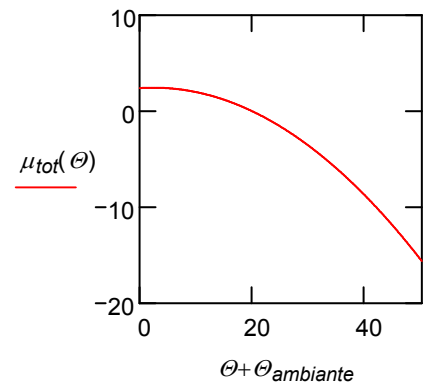
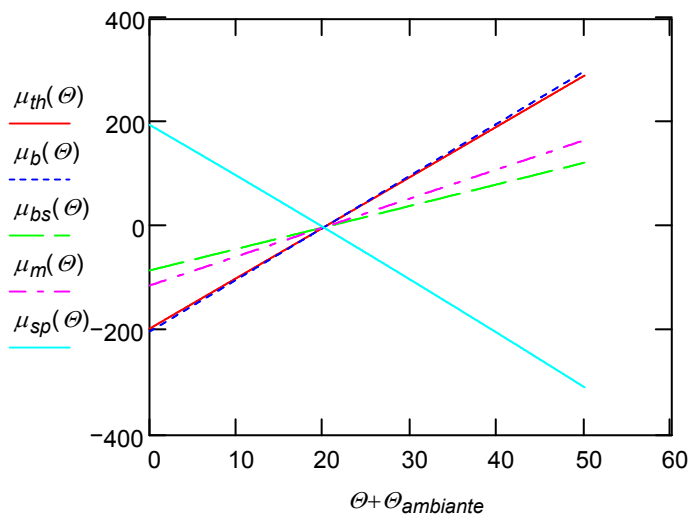
## Variation de marche due au spiral

$$\delta_{sp}(\Theta) := \frac{-3}{2} \cdot \left( \alpha_{ac_0} \cdot \Theta + \alpha_{ac_1} \cdot \Theta^2 \right) - \frac{1}{2} \cdot \left( \gamma_{ac_0} \cdot \Theta + \gamma_{ac_1} \cdot \Theta^2 \right)$$

$$\mu_{sp}(\Theta) := -86400 \cdot \delta_{sp}(\Theta)$$

## Graphes comparatifs et erreur secondaire

$$\mu_{tot}(\Theta) := \mu_{th}(\Theta) + \mu_{sp}(\Theta)$$



## Graphes des déformations

➡ Référence :D:\Résonateur (TE)\Data\Définition Atan.mcd(R)

### Forme initiale de la serge et du bras

$$n := 400 \quad i := 0..n \quad \Delta\psi := 178 \cdot \text{deg} \quad j := 2..n-2 \quad R_{b_j} := -R_0 + \frac{2 \cdot R_0}{n} \cdot j$$

$$\phi_i := \lambda_0 - \pi + \frac{\Delta\psi}{n} \cdot i \quad x_0(\phi) := R_0 \cdot \cos(\phi) \quad y_0(\phi) := R_0 \cdot \sin(\phi) \quad r_0(\phi) := \sqrt{x_0(\phi)^2 + y_0(\phi)^2}$$

### Déformations thermiques de la serge et du bras

$$\Theta := 50 \quad \text{Facteur d'agrandissement graphique des déformations} \quad Ag := 10 \quad \Theta := Ag \cdot \Theta$$

$$a(\Theta) := R_0 \cdot (\alpha' - \alpha_R) \cdot \Theta$$

$$x_{th}(\Theta, \phi) := a(\Theta) + R(\Theta) \cdot \cos(\phi) \quad y_{th}(\Theta, \phi) := R(\Theta) \cdot \sin(\phi) \quad r_{th}(\Theta, \phi) := \sqrt{x_{th}(\Theta, \phi)^2 + y_{th}(\Theta, \phi)^2}$$

$$\beta_i := \text{Atan}(x_{th}(\Theta, \phi_i), y_{th}(\Theta, \phi_i))$$

